Version 30.11.2007 Oktober 2007

MIII – Analysis in mehreren Veränderlichen – WiSe 2007/08

Kurzfassung
Martin Schottenloher

$\infty\infty\infty$

Kapitel XI. Untermannigfaltigkeiten

Es handelt sich um differenzierbare Untermannigfaltigkeiten in Zahlenräumen $\mathbb{R}^n$.

§36 Der Fixpunktsatz von Banach

Dieser Satz ist uns schon früher begegnet, aber wegen der Bedeutung gerade für den nachfolgenden Umkehrsatz und für die Theorie der Mannigfaltigkeiten wird er hier noch einmal ausführlich behandelt.

Eine Abbildung $\Phi : M \to M$ eines metrischen Raumes M mit Metrik d in sich heißt *kontrahierend*, wenn es eine Konstante $L > 0$ mit $L < 1$ gibt, so dass für alle $x, y \in M$ gilt:

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq L\, d(x, y)\,.$$

(36.1) Satz: (Fixpunktsatz von Banach) *Eine kontrahierende Abbildung $\Phi : M \to M$ auf einem nichtleeren, vollständigen metrischen Raum M hat einen eindeutig bestimmten Fixpunkt. Es gibt also $\xi \in M$ mit $\Phi(\xi) = \xi$ und ξ mit dieser Eigenschaft ist einzig.*

Als Anwendung haben wir den folgenden allgemeinen Umkehrsatz:

(36.2) Satz: *Es sei E ein Banachraum über $\mathbb{R}$ und es sei $f : \overline{B(0,R)} \to E$ eine Abbildung auf der abgeschlossenen Kugel $\overline{B(0,R)}\,, R > 0,$ von der Form $f(x) = x + h(x)$ für alle $x \in \overline{B(0,R)}$. Gilt dann $h(0) = 0$ und gibt es eine Konstante $L < 1$ mit $\|h(x) - h(y)\| \leq L\ \|x - y\|$ für alle $x, y \in \overline{B(0,R)}$, so ist f bei 0 lokal umkehrbar mit stetiger Umkehrabbildung. Das bedeutet genauer: Es gibt offene Umgebungen $U, V \subset \overline{B(0,R)}$ von 0, so dass die Restriktion $f|_U : U \to V$ bijektiv ist mit einer stetigen Umkehrfunktion. $g := (f|_U)^{-1} : V \to U$ ist also stetig und erfüllt*

$$g \circ f(x) = x\ ,\ \forall x \in U\,,\ \text{ bzw. }\ g \circ f = \mathrm{id}_U\,,$$

und

$$f \circ g(y) = y\ ,\ \forall y \in V\,,\ \text{ bzw. }\ f \circ g = \mathrm{id}_V\,.$$

§37 Der Umkehrsatz

Beispiele zur Motivation: $y = Ax$ für $n \times n$-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $y = f(x) = x^2$. Im ersten Fall hat man die Umkehrung (Auflösung) $x = A^{-1}y$, wenn $\det A \neq 0$. Im zweiten Fall gibt es keine globale Auflösung und auch nicht überall eine lokale: $x = \pm\sqrt{y}\,,\ y \in \mathbb{R}_+$. [19.10.07]

(37.1) Satz: (Umkehrsatz für differenzierbare Abbildungen) *Gegeben sei eine stetig differenzierbare Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. In einem Punkt $a \in \Omega$ gelte $\det Df(a) \neq 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subset \Omega$ von a und eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von $f(a)$, so dass die Restriktion $f|_U : U \to V$ eine stetig differenzierbare Umkehrung $g : V \to U$ hat.*

(37.2) Zusatz: *Unter den Voraussetzungen des Satzes 37.1 gilt $Dg(f(a)) = Df(a)^{-1}$.*

(37.3) Lemma: *Es sei $f : U \to V$ stetig differenzierbar und bijektiv für offene Teilmengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit stetiger Umkehrabbildung $g := f^{-1} : V \to U$ und mit $\det Df(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Dann ist g stetig differenzierbar. Ferner gilt: Ist f q-mal stetig differenzierbar, so gilt das auch für g.*

Als Wiederholung:

(37.4) Mittelwertsatz: Sei $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^m)\,,\ \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $a \in \Omega$ und $h \in \mathbb{R}^n$ mit $a + th \in \Omega$ für alle $t \in [0,1]$ gilt dann

$$f(a+h) - f(a) = \int_0^1 Df(a+th).h\,dt = \left(\int_0^1 Df(a+th)\,dt\right).h\ .$$

(37.5) Beispiele:

1° Polarkoordinaten $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,,\ (r,\theta) \mapsto r(\cos\theta, \sin\theta)$. Wegen $\det Df(r,\theta) = r \neq 0$ ist f überall lokal umkehrbar. Beachte: f ist nicht injektiv.

2° $f(x) = x^3$ hat stetige Umkehrung, die in 0 nicht differenzierbar ist. In 0 ist die Bedingung $\det Df(0) = f'(0) \neq 0$ verletzt. [23.10.07]

3° Bedeutung der Stetigkeit von $Df(x)$: Die Funktion $f(x) = x + 2x^2 \sin 1/x$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ ist differenzierbar und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, insbesondere $f'(0) = 1$. Dennoch ist f in keiner Umgebung der 0 injektiv, f hat dort keine lokale Umkehrabbildung. Die Stetigkeitsbedingung des Satzes (37.1) ist nicht erfüllt, $x \mapsto f'(x) = \det Df(x)$ ist in 0 nicht stetig.

Man beachte, dass die Aussagen (37.1 – 4) auch für Abbildungen auf offenen Teilmengen Ω von Banachräumen gelten, es muss die Determinantenbedingung jeweils direkt ersetzt werden durch die Aussage, dass $Df(a)$ invertierbar ist.

§38 Implizite Abbildungen

Auflösen von $F(x,y)=0$ nach y , $y=h(x)$, also $h(x)$ durch $F(x,h(x))=0$ implizit gegeben. Beispiele:

1) $F(x,y)=Ax+Dy=0$ mit linearen $A:\mathbb{R}^{n-m}\to\mathbb{R}^m$ und $D:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$. $h(x)=-D^{-1}Ax$, wenn D invertierbar.

2) $F(x,y)=x^2+y^2-1$ kann nicht global aufgelöst werden. Aber in dem Bereich $U=\,]-1,1[\times]0,1[$ ist $h(x)=\sqrt{1-x^2}$ eine (lokale) Auflösung: $F(x,h(x))=0$ für alle $x\in\,]-1,1[$ und es gilt für $(x,y)\in U$: $F(x,y)=0 \iff y=h(x)$. Zu jedem Punkt auf der Sphäre $\mathbb{S}^2=F^{-1}(0)$ findet man eine entsprechende lokale Auflösung nach der zweiten oder nach der ersten Variablen.

(38.1) Satz: (Implizite Funktionen) *Es seien $F\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$, $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ offen, und $a=(\mathring{x},\mathring{y})\in\Omega$ mit $F(\mathring{x},\mathring{y})=0$. Es gelte*

$$\partial_y F(a)\neq 0\,.$$

Dann existieren eine offene Umgebung $U\subset\mathbb{R}$ von $\mathring{x}$, eine offene Umgebung $V\subset\mathbb{R}$ von $\mathring{y}$ und eine stetig differenzierbare Funktion $h:U\to V$ mit

$$(U\times V)\cap F^{-1}(0)=\{(x,h(x)):x\in U\}\,,$$

das heißt, dass für alle $(x,y)\in U\times V$ gilt

$$F(x,y)=0\iff y=h(x)\,.$$

Ferner ist

$$h'(x)=-\frac{\partial_x F(x,h(x))}{\partial_y F(x,h(x))}\,.$$

Schließlich gilt: Ist F q-mal stetig differenzierbar, dann auch h.

(38.2) Satz: (Implizite Abbildungen) *Es seien $F\in\mathcal{C}^1(\Omega),\mathbb{R}^m)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^m$ offen, und $a=(\mathring{x},\mathring{y})\in\Omega$ mit $F(\mathring{x},\mathring{y})=0$. Es gelte*

$$\det\frac{\partial F}{\partial y}(a)\neq 0\quad\text{mit}\quad \frac{\partial F}{\partial y}(a)=\left(\frac{\partial F^j}{\partial y^i}(a)\right)_{1\le i,j\le m}\,.$$

Dann existieren eine offene Umgebung $U\subset\mathbb{R}^k$ von $\mathring{x}$, eine offene Umgebung $V\subset\mathbb{R}^m$ von $\mathring{y}$ und eine stetig differenzierbare Funktion $h:U\to\mathbb{R}^m$ mit

$$(U\times V)\cap F^{-1}(0)=\{(x,h(x)):x\in U\}\,,$$

das heißt, dass für alle $(x,y)\in U\times V$ gilt

$$F(x,y)=0\iff y=h(x)\,.$$

Ferner ist

$$Dh(x)=-\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,h(x))\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}(x,h(x))\,.$$

Schließlich gilt: Ist F q-mal stetig differenzierbar, dann auch h.

Beispiel: $F(x,y,z) = z^3 + 2xy - 4xz + 2y - 1$ erfüllt $F(1,1,1) = 0$. Durch $F(x,y,z) = 0$ wird dann implizit in einer geeigneten offenen Umgebung U von $(1,1)$ eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ definiert. Das folgt aus dem Satz über implizite Abbildungen 38.2 wegen

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = -1 \neq 0\,.$$

Es ist (ebenfalls nach dem Satz 38.2)

$$\partial_x g(1,1) = -\partial_x F(1,1,1) = -2$$

und

$$\partial_y g(1,1) = \partial_y g(1,1) = -\partial_y F(1,1,1) = 4\,.$$

Wieder gilt, dass die Aussagen auch im Falle von unendlichdimensionalen Banachräumen E ihre Richtigkeit haben. Allerdings muss man von einer direkten Zerlegung $E = E_1 \times E_2$ in *abgeschlossene* Unterräume $E_i \subset E$ ausgehen. Für eine $\mathcal{C}^q$-Abbildung $F : \Omega \to E_3\,,\, \Omega \subset \mathbb{E}$ offen, in einen weiteren Banachraum E_3 mit $F(\mathring{x}, \mathring{y}) = 0$ erhält man dann analog eine lokale Auflösung, wenn die Ableitung $D_y F(\mathring{x}, \mathring{y}) : E_2 \to E_3$ eine stetige lineare Inverse hat.

§39 Untermannigfaltigkeiten

(39.1) Sprachgebrauch: $\varphi : U \to V$ ist ein $\mathcal{C}^q$-*Diffeomorphismus* für offene $U, V \subset \mathbb{R}^n$ (oder $\subset E$ mit einem Banachraum E), wenn φ q-mal stetig differenzierbar und bijektiv mit q-mal stetig differenzierbarer Umkehrabbildung ist.

(39.2) Definition: (Untermannigfaltigkeiten) Eine Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ heißt k-*dimensionale* $\mathcal{C}^q$-*Untermannigfaltigkeit* ($n, k, q \in \mathbb{N}$) des $\mathbb{R}^n$, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a und einen $\mathcal{C}^q$-Diffeomorphismus $\Phi : U \to V$ auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ so gibt, dass

$$\Phi(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

gilt.

[26.10.07]

Dabei ist $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ der Untervektorraum $\mathbb{R}^k \times \{0\} = \{(x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0) : x^j \in \mathbb{R}\,\}$ von $\mathbb{R}^n$.

Sprachgebrauch:

1) Das „Unter“ lassen wir gelegentlich fort. Wenn wir von Mannigfaltigkeiten sprechen, meinen wir Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ für eine geeignetes n. Tatsächlich gibt es auch „abstrakte“ Mannigfaltigkeiten die in der Art, wie sie auftreten, a priori nicht Untermannigfaltigkeiten sind. Das ergibt das Konzept eine allgemeinen Mannigfaltigkeiten, das wir voraussichtlich zum Schluss der Vorlesung kennen lernen werden.

2) $k = 1$: Eindimensionale Mannigfaltigkeiten heißen auch *Kurven*; allerdings stimmt der Begriff nicht ganz mit dem im letzten Semester gefassten Begriff einer Kurve überein. Siehe Präsenzaufgaben 2.

3) $k = 2$: Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten nennt man auch *Flächen*.

4) $k = n - 1$: $n - 1$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ nennt man auch *Hyperflächen*.

5) Die Differentiationsordnung q wird gelegentlich weggelassen. Dann spricht man von *differenzierbaren Mannigfaltigkeiten*, wenn man eine $\mathcal{C}^q$-Mannigfaltigkeit vorliegen hat mit $q \geq 1$.

6) $q = 0$ gibt in der Definition auch Sinn, wenn man unter einem $\mathcal{C}^0$-Diffeomorphismus eine topologische Abbildung versteht. Man hat dann das Konzept einer topologischen Mannigfaltigkeit. Die folgenden Ausführungen allerdings benutzen die Differenzierbarkeit, insbesondere die Sätze der letzten beiden Paragraphen. Daher nehmen wir im folgenden stets $q \geq 1$ an.

Das bedeutet: $n, k, q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 1$ und $k \leq n$.

(39.3) Beispiele:

1° $M \subset \mathbb{R}^n$ n-dimensional $\iff$ M ist offen in $\mathbb{R}^n$.

2° Eine endliche Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist 0-dimensional.

3° $\mathbb{S}^1$ ist eine $\mathcal{C}^q$-Mannigfaltigkeit der Dimension 1. Der Nachweis fällt überraschend kompliziert aus, wenn man die in der Definition geforderten Eigenschaft bestätigen will. Der Grund liegt darin, dass in der Definition relativ viel von dem umgebenden System der Mannigfaltigkeit benötigt wird. Sich davon zu lösen, ist der Sinn der folgenden Resultate, in denen drei hinreichende Kriterien beschrieben werden, die sicherstellen, dass eine vorgegebene Menge eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Dass diese Kriterien auch notwendig sind, wird in einem abschließendem Satz (vgl. 39.17) festgestellt.

(39.4) Satz: *Sei $W \subset \mathbb{R}^k$ offen und $g \in \mathcal{C}^q(W, \mathbb{R}^m)$. Dann ist der Graph von g, also die Menge*

$$\mathrm{Graph}(g) = \Gamma(g) := \{(x, g(x)) : x \in W\}$$

eine k-dimensionale $\mathcal{C}^q$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ ($k + m = n$).

Der Satz bedeutet, dass eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ bereits dann eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, wenn es zu jedem $a \in M$ eine Umgebung U gibt, so dass $M \cap U$ Graph einer stetig differenzierbaren Abbildung ist.

Jetzt ist ganz leicht zu sehen, dass $\mathbb{S}^1$ eine Mannigfaltigkeit ist, weil z.B. zu $(0, 1) \in \mathbb{S}^1$ für $U =]-1, +1[\times \mathbb{R}_+$ gilt:

$$\mathbb{S}^1 \cap U = \{(x, \sqrt{1 - x^2}) : x \in]-1, +1[\} = \Gamma(g)$$

mit $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Analog für andere Punkte anstelle von $(0, 1)$.

(39.5) Definition: Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine q-mal stetig differenzierbare Abbildung auf einer offenen Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^n$.

1° $x \in \Omega$ heißt *regulärer Punkt von* f $:\iff$ $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist surjektiv.

2° f heißt *regulär* (oder *Submersion*) $:\iff$ alle $x \in \Omega$ sind reguläre Punkte von f.

3° $y \in \mathbb{R}^m$ heißt *regulärer Wert von* f $:\Longleftrightarrow$ alle Punkte $x \in f^{-1}(y)$ sind reguläre Punkte von f.

(39.6) Bemerkungen:

1° Im Falle $n < m$ gibt es keine regulären Punkte.

2° $m \leq n$: x regulärer Punkt von $f \iff \mathrm{rg} Df(x) = m$.

3° $m = 1$: x regulärer Punkt von $f \iff \nabla f(x) \neq 0$.

4° $y \in \mathbb{R}^m$ mit $y \notin f(\Omega)$ ist immer regulärer Wert von f.

5° Es sei $a \in \Omega$ ein regulärer Punkt von f. Aufgrund des Satzes über implizite Abbildungen (38.2) gibt es nach einer eventuell nötigen Permutation der Koordinaten eine Umgebung $U = W \times V \subset \Omega$ von a mit offenen $W \subset \mathbb{R}^{n-m}$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ und eine $\mathcal{C}^q$-Abbildung $h : W \to \mathbb{R}^m$ mit

$$M \cap U = \Gamma(h)\,,$$

wobei $M := f^{-1}(f(a)) = \{x \in \Omega : f(x) = f(a)\}$.

Beweis: Durch f wird ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y^1 &= f^1(x^1, \ldots, x^m, \ldots, x^n) \\ &\ldots \\ y^m &= f^m(x^1, \ldots x^m, \ldots, x^n) \end{aligned}$$

gegeben, dass es in a aufzulösen gilt. Mit $b := f(a)$ soll also die Menge der $x \in \Omega$ beschrieben werden, die $b = f(x)$ erfüllen.

Nach Voraussetzung hat $Df(a)$ den Rang m, denn $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist surjektiv. Also gibt es in $Df(a)$ als Jacobimatrix mit den m Gradienten $\nabla f^j(a)\,,\ j = 1, \ldots, m$ als Zeilenvektoren m linear unabhängige Spaltenvektoren, die durch partielle Ableitung nach geeigneten m der n Variablen x^j zustande kommen. Durch geeignete Umordnung der Variablen x^i können wir daher annehmen, dass die letzten m der Spalten von $Df(a)$ linear unabhängig sind, also die $\left(\partial_i f^j(a)\right)_{1 \leq j \leq m}\,,\ i = n - m + 1, \ldots, n$. Zur Anpassung des Problems an die Voraussetzungen des Satzes über implizite Abbildungen schreiben wir $k = n - m$ und $x = (z, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n$ mit $z = (x^1, \ldots, x^k)$ und $y = (y^1, \ldots, y^m) = (x^{k+1}, \ldots, x^n)$; weiterhin $F(z, y) := f(z, y) - f(a)$. Dann ist offensichtlich $F(a) = 0$ und $F^{-1}(0) = M = f^{-1}(f(a))$. Und die Matrix

$$\left(\frac{\partial F^j}{\partial y^i}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq m} = \left(\frac{\partial f^j}{\partial y^i}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq m}$$

hat nichtverschwindende Determinate entsprechend der Wahl der Koordinaten $y^j = x^{k+j}$. Es sind also die Voraussetzungen des Satzes über implizite Abbildungen erfüllt, und wir wissen, dass es mit der Notation $a = (\mathring{z}, \mathring{y})$ eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n-m}$ von $\mathring{z}$, eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^m$ von $\mathring{y}$ und eine $\mathcal{C}^q$-Abbildung $h : W \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

$$F^{-1}(0) \cap (W \times V) = \Gamma(h)$$

gilt. Damit ist $M \cap U = \Gamma(h)$ bewiesen. ■

Aus diesem Resultat (39.6.5°) folgt unmittelbar:

(39.7) Satz: (Kriterium) $0 \in f(\Omega)$ *sei regulärer Wert einer* q*-mal stetig differenzierbaren Abbildung* $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$*,* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen. Dann ist* $M = f^{-1}(0)$ *eine* $n-m$*-dimensionale* $\mathcal{C}^q$*-Mannigfaltigkeit.*

Zusatz: M *ist lokal Graph einer* $\mathcal{C}^q$*-Abbildung, vgl. Herleitung in 39.6.5°.*

(39.8) Beispiele:

1° Jetzt ist es ganz leicht, $\mathbb{S}^n$ als Hyperfläche nachzuweisen. Es ist $\mathbb{S}^n = f^{-1}(0)$ mit $f(x) = (x^1)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2 - 1 = \|x\|^2 - 1$ und es gilt $\nabla f(x) = 2x$ (bzw. $= 2x^T$). Für $x \in \mathbb{S}^n$ ist $2x \neq 0$.

[30.10.07]

2° Eine *Niveaufläche* zu einer $\mathcal{C}^q$-Abbildung $f : \Omega \in \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist definitionsgemäß eine Menge der Form $f^{-1}(c)$ für einen regulären Wert $c \in f(\Omega)$. Eine Niveaufläche ist dann nach dem Kriterium 39.7 eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$. Ein einfaches Beispiel dazu ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ f(x, y) = x^2 - y^2$. f ist surjektiv und beliebig oft stetig differenzierbar mit $\nabla f(x, y) = 2(x, -y)^T$. Für $c \neq 0$ ist daher $f^{-1}(c)$ eine Niveaufläche (der Dimension 1), und zwar besteht $f^{-1}(c)$ für negative c aus 2 Hyperbeln, den Graphen der Funktionen $y = \pm\sqrt{x^2 - c}$, und für positive c entsprechend aus 2 Hyperbeln, den Graphen der Funktionen $x = \pm\sqrt{y^2 + c}$. Die Menge $f^{-1}(0) = \{(x, y) : (x + y)(x - y) = 0\}$ besteht aus zwei Geraden durch (0.0), den Diagonalen, und diese Menge ist keine Untermannigfaltigkeit, weil es in $(0, 0) \in f^{-1}(0)$ keine Umgebung U mit einem Diffeomorphismus $\Phi : U \to V$, für den $U \cap f^{-1}(0) = V \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ erfüllt wäre, gibt. Gelegentlich nennt man eine solche Menge dann eine ausgeartete Niveaufläche.

In Verallgemeinerung hat man in $\mathbb{R}^n$ für $f(x) = (x^1)^2 - \sum_{j=2}^n (x^j)^2$ die Niveaufläche $f^{-1}(c)$, $c \neq 0$, die im positiven Fall $c = m^2$, $m > 0$ aus zwei Hyperboloiden (oder Hyperbelschalen)

$$x^1 = \pm\sqrt{\sum_{j=2}^n (x^j)^2 + m^2}$$

besteht. Und in $c = 0$ hat man analog zum Fall $n = 2$ die Ausartung

$$x^1 = \pm\sqrt{\sum_{j=2}^n (x^j)^2}\,,$$

die aus zwei spitzen Kegeln besteht, die sich in 0 berühren, und die keine Mannigfaltigkeit ist.

3° Die Quadrik als weitere Verallgemeinerung von 2°: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix $A \neq 0$ und $q(x) = x^T Ax$ die zugehörige quadratische Form. Es gilt $\nabla q(x) = 2Ax$. Also ist für $c \neq 0$ jeder Punkt $x \in q^{-1}(c)$ regulär wegen $x^T Ax = c \neq 0$. $q^{-1}(c)$ ist also Niveaufläche und Hyperfläche, wenn $c \in q(\mathbb{R}^n)$.

4° Vorausbemerkung: Die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist offen in $\mathbb{R}^{n\times n}$ (z.B. weil $\det$ eine stetige Funktion ist), also ist $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension n^2. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ hat diverse wichtige Untergruppen. Zum Beispiel die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n) = \{A : A^T A = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\}$. In den Übungen wird mit Hilfe von 39.7 gezeigt, dass $\mathrm{O}(n)$ eine $\mathcal{C}^q$-Untermannigfaltigkeit der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$ für beliebige $q \in \mathbb{N}$ ist.

Im Falle $n = 2$ ergeben die Bedingungen an die Koeffizienten einer 2×2-Matrix A, die sicherstellen, dass A zu $\mathrm{O}(2)$ gehört, 4 Gleichungen an die 4 Koeffizienten. Diese Gleichungen sind aber nicht unabhängig. Eine der Gleichungen ist überflüssig, und die anderen drei liefern als Lösungsmenge eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit, die 2 Kreislinien $\mathbb{S}^1$ entspricht.

Die Notwendigkeit, einige der definierenden Funktionen wegzulassen, ergibt sich oft, und man hat in Verallgemeinerung zu 37.7 das folgende Kriterium:

(39.9) Satz: *$M \subset \mathbb{R}^n$ k-dimensionale $\mathcal{C}^q$-Untermannigfaltigkeit*

$\iff$ $\forall\, a \in M\ \exists\, U \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $a \in U$, *und* $f \in \mathcal{C}^q(U, \mathbb{R}^m)$ *mit*

1° $M \cap U = f^{-1}(0)$

2° $\forall\, x \in U : \mathrm{rg} Df(x) = n - k$.

Im Übrigen hat man für Untergruppen von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ das folgende nützliche Resultat: *Jede abgeschlossen Untergruppe G von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist eine $\mathcal{C}^q$-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit beliebigem $q > 0$.* (abgeschlossene im topologischen Sinne, dass $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine abgeschlossen Teilmenge in $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

(39.10) Definition: $f \in \mathcal{C}^q(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt *Immersion* (oder genauer $\mathcal{C}^q$-Immersion), wenn $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stets injektiv ist für $x \in \Omega$.

Damit f Immersion sein kann, muss $n \le m$ gelten.

(39.11) Beispiele:

1° $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, ist eine Immersion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. f ist nicht injektiv. Aber es ist $f(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1$ eine Untermannigfaltigkeit.

2° Ebenso die Immersion auf die Ohrschnecke: $t \mapsto (1 + 2\cos t)(\cos t, \sin t)$.

3° $t \mapsto f(t) = \sin 2t(-\sin t, \cos t)$, $t \in \left]-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi\right[$, ist eine injektive $\mathcal{C}^q$-Immersion, $q > 0$. Das Bild $f(\left]-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi\right[)$ ist aber keine Mannigfaltigkeit. Bei $(0,0) \in f(\left]-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi\right[)$ findet man keine Umgebung U, in der sich $f(\left]-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi\right[)$ linearisieren ließe. Jede solche Umgebung U enthält einerseits Punkte $f(t)$ mit t nahe bei 0 und andererseits Punkte $f(t')$ mit t' nahe bei $\frac{1}{2}\pi$.

(39.12) Satz: (Immersionssatz) *Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine $\mathcal{C}^q$-Immersion mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $q > 0$. Dann gibt es zu jedem $\mathring{x} \in \Omega$ eine offene Umgebung $U_0 \subset \mathbb{R}^n$, so dass $f(U_0)$ eine n-dimensionale $\mathcal{C}^q$-Untermannigfaltigkeit ist.*

[02.11.07]

(39.13) Beispiele:

1° Die *Neilsche Parabel* N ist die Spur der Kurve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2, t^3)$, also $N := f(\mathbb{R})$. $f : \mathbb{R} \to N$ ist offensichtlich bijektiv. f ist stetig differenzierbar mit $\dot{f}(t) = (2t, 3t^2)$. Daher ist f auf $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Immersion, während die Ableitung $\dot{f}(0) = (0,0)$ offensichtliche nicht injektiv ist.

Nach Satz 39.12 gibt es daher zu jedem Punkt $a \in N$, $a \neq (0,0)$, eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$, so dass $U \cap N$ eine $\mathcal{C}^q$-Mannigfaltigkeit ist, was sich natürlich auch leicht direkt nachprüfen lässt. Für den Punkt $(0,0)$ macht der Satz keine Aussage. Es gilt aber hier, dass es keine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^2$ von $(0,0)$ gibt, so dass $W \cap N$ eine Mannigfaltigkeit ist.

2° Ein geläufige „Parametrisierung“ der Sphäre $\mathbb{S}^2$ wird durch

$$\psi(\varphi, \theta) := (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)\ ,\ (\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 ,$$

gegeben. ψ ist beliebig oft differenzierbar und es gilt $\psi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{S}^2$. Wegen der Perioden von $\sin$ und $\cos$ ist ψ nicht injektiv. Die Ableitung $D\psi(\varphi, \theta)$ hat in jedem Punkt (φ, θ) mit $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ den Rang 2, in den anderen Punkten den Rang 1. Also ist ψ auf $\Omega = \{(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \notin \pi\mathbb{Z}\}$ eine $\mathcal{C}^q$-Immersion.

Auf der Menge $V :=]0, 2\pi[\times]0, \pi[\subset \mathbb{R}^2$ ist ψ injektiv und mit $U := \psi(V)$ existiert die Umkehrabbildung $\phi := \psi^{-1} : U \to V$. ϕ ist wie ψ bijektiv und stetig, wir haben also eine topologische Abbildung $\phi : U \to V$, deren Umkehrung ψ eine Immersion ist. So etwas nennt man „Karte“.

(39.14) Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale $\mathcal{C}^q$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Eine $\mathcal{C}^q$*-Karte* $\varphi : U \to V$ ist durch die folgenden Daten gegeben.

1) $U \subset M$ ist offene Teilmenge von M (in der Relativtopologie).

2) $V \subset \mathbb{R}^k$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$.

3) $\varphi : U \to V$ ist topologisch.

4) $\varphi^{-1} : V \to U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine $\mathcal{C}^q$-Immersion.

(39.15) Beispiele:

1° Das Beispiel 39.13.2° liefert für jede offene Teilmenge $V \subset]0, 2\pi[\times]0, \pi[\subset \mathbb{R}^2$ mit $U := \psi(V) \subset \mathbb{S}^2$ eine Karte $\varphi := (\psi|_V)^{-1}$.

2° Ganz andere Karten für $\mathbb{S}^2$ entstehen durch die so genannte *stereographische Projektion*. Für $\mathbb{S}^n$ und $N = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$ wird bezüglich der Koordinaten $(x, z) = (x^1, \ldots, x^n, z)$ ($x^{n+1} = z$) durch $U := \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ und

$$\varphi(x, z) = \frac{1}{1-z} x$$

eine Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^n = V$ definiert. φ ist bijektiv mit Umkehrabbildung

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\|\xi\|^2 + 1} \left(2\xi, \|\xi\|^2 - 1\right) , \; \xi \in \mathbb{R}^n .$$

An den Formeln kann man erkennen, dass φ topologisch ist. Schließlich ist ψ eine Immersion, und damit φ eine $\mathcal{C}^q$-Karte ($q \geq 1$ beliebig).

3° Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre $\mathcal{C}^q$-Kurve im Sinne der Vorlesung MIIA, also $\dot\gamma(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Dann ist $\psi := \gamma|_{]a,b[} :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Sei γ injektiv. Dann ist die Spur $\psi(]a, b[) = M$ eine $\mathcal{C}^q$-Mannigfaltigkeit und die Umkehrung $\varphi := \psi^{-1} : M \to]a, b[$ eine Karte. Man beachte: In der Regel ist $\psi([a, b])$ nicht Mannigfaltigkeit.

(39.16) Satz: $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale $\mathcal{C}^q$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es zu jedem Punkt $a \in M$ eine $\mathcal{C}^q$-Karte $\varphi : U \to V$ mit $a \in U$, wobei $V \subset \mathbb{R}^k$ offen in $\mathbb{R}^k$ ist.

Ein *$\mathcal{C}^q$-Atlas* auf eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Kollektion $(\varphi_\iota : U_\iota \to V_\iota)_{\iota \in I}$ von Karten mit $M = \bigcup\{U_\iota : \iota \in I\}$. Satz 39.16 besagt also, dass jede k-dimensionale $\mathcal{C}^q$-Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^n$ einen $\mathcal{C}^q$-Atlas besitzt.

Zusammengefasst liefern die Resultate dieses Paragraphen:

(39.17) Äquivalenzsatz: *Für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1° *M ist k-dimensionale $\mathcal{C}^q$-Untermannigfaltigkeit.*

2° *M ist lokal Graph einer $\mathcal{C}^q$-Abbildung*[1].

3° *M ist lokal Nullstellengebilde einer $\mathcal{C}^q$-Abbildung mit konstantem Rang $n - k$ der Ableitung*[2].

4° M hat einen $\mathcal{C}^q$-Atlas aus Karten $\varphi_\iota : U_\iota \to V_\iota \subset \mathbb{R}^k$ mit Werten in der offenen Menge $V_\iota \subset \mathbb{R}^k$.

In den Übungen wurde der Satz vom Rang behandelt.

---

[1] das heißt, es gibt zu jedem Punkt $a \in M$ nach einer geeigneten Permutation der Koordinaten eine offene Umgebung $U = W \times V \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ von a mit $W \subset \mathbb{R}^k$ offen und eine $\mathcal{C}^q$-Abbildung $h : W \to \mathbb{R}^{n-k}$, so dass $M \cap U = \Gamma(h)$.

[2] das heißt, es gibt zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine $\mathcal{C}^q$-Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ mit $\mathrm{rg} Df(x) = n - k$ für alle $x \in U$ und $M \cap U = f^{-1}(0)$.

(40.18) Rangsatz: *Die $\mathcal{C}^q$-Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ habe auf der offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ einen konstanten Rang r in der Umgebung U eines Punktes $a \in \Omega$, d.h. $\mathrm{rg} Df(x) = r$ für alle $x \in U$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_1 \subset U$ von a und eine offene Umgebung $V_1 \subset R^m$ von $f(a)$, so wie $\mathcal{C}^q$-Diffeomorphismen $g : U_1 \to U_2 \subset \mathbb{R}^n$ und $h : V_1 \to V_2$ mit $g(a) = 0\,,\ h(f(a)) = 0$, so dass*

$$h \circ f \circ g^{-1}(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^r, 0 \dots, 0)$$

für alle $x \in U_2$ gilt. Mit der linearen Projektion $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,,\ \pi(x) = (x^1, \dots, x^r, 0 \dots, 0)$ auf die ersten r Koordinaten gilt also

$$h \circ f \circ g^{-1} = \pi|_{U_2}\,.$$

Auch für das Konzept der Untermannigfaltigkeiten gibt es eine entsprechende Version für unendlichdimensionale Banachräume, wobei man sich bei der Definition wie im Falle des Satzes über implizite Abbildungen wieder auf direkte Zerlegungen $E = E_1 \times E_2$ mit abgeschlossenen Unterräumen E_i beschränken muss.

§40 Tangentialraum

Im Folgenden sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale $\mathcal{C}^q$-Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $a \in M$ ein Punkt und $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^k$ eine $\mathcal{C}^q$-Karte mit $a \in U$, zu der ja die Immersion $\psi = \varphi^{-1} : V \to U \subset \mathbb{R}^n$ gehört. Ferner: $b = \varphi(a)$.

U wird auch *Koordinatenumgebung* genannt und V der *Parameterbereich*. ψ die *Parametrisierung*. Für $x \in U$ ist $\varphi(x) = q \in V$ der Parameter, der x beschreibt. $q = (q^1, \dots, q^k)$ sind die durch die Karte gegebenen *Koordinaten*. Diese Notation gilt für den gesamten Paragraphen.

(40.1) Definition: $v \in \mathbb{R}^n$ ist ein *Tangentialvektor an M in a*, wenn es eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ gibt mit $\gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset M$, $\gamma(0) = a$ und $\dot\gamma(0) = v$. T_aM ist die Gesamtheit der Tangentialvektoren an M in a.

(40.2) Lemma: *T_aM ist k-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.* [06.11.07]

(40.3) Bemerkungen:

1° Es gilt $T_aM = \mathrm{im} D\psi(b) = \{D\psi(b).w : w \in \mathbb{R}^k\}$ und es ist

$$D\psi(b) : \mathbb{R}^k \to T_aM$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraumisomorphismus. Außerdem wird durch

$$\psi_j := \partial_j \psi = \frac{d}{dt}\psi(b + te_j)|_{t=0} \in \mathbb{R}^n\,,\ j = 1, \dots, k\,,$$

eine Basis von T_aM gegeben. Für $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^n)$ mit den Komponenten $\psi^j : V \to \mathbb{R}$ ist

$$\psi_j = (\partial_j \psi^1(b), \dots, \partial_j \psi^n(b)) \in T_aM \subset \mathbb{R}^n\,.$$

2° Im Falle von $\Phi(U' \cap M) = V' \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ für einen $\mathcal{C}^q$-Diffeomorphismus $\Phi : U' \to V' \subset \mathbb{R}^n$, $a \in U'$, $U' \subset \mathbb{R}^n$ offen und $V' \subset \mathbb{R}^n$ offen, gilt

$$T_aM = D\Phi(a)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})\,.$$

3° Im Falle, dass M lokal ein Graph ist, also $(W \times V'') \cap M = \Gamma(h)$ mit $h \in \mathcal{C}^q(W, \mathbb{R}^{n-k})$, $a = (\mathring{x}, \mathring{y}) \in W \times V''$, $W \subset \mathbb{R}^k$ offen, $V'' \subset \mathbb{R}^{n-k}$ offen, gilt

$$T_a M = \Gamma(Dh(\mathring{x}))\,.$$

4° Im Falle von $U' \cap M = f^{-1}(0)$ für eine $\mathcal{C}^q$-Abbildung $f : U' \to \mathbb{R}^m$, $U' \subset \mathbb{R}^n$ offen, mit $\mathrm{rg} Df(x) = n - k$ für alle $x \in U'$ gilt

$$T_a M = \ker Df(a)\,.$$

Beispiel: $\mathbb{S}^n$ mit $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = \|x\|^2 - 1\,,\ x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Für $\mathcal{C}^1$-Kurven γ mit $\gamma(t) \in \mathbb{S}^n$ für alle t und $\gamma(0) = a \in \mathbb{S}^2$ gilt $f(\gamma(t)) = 0$ also $\nabla f(a).\dot{\gamma}(0) = 0$. Das bedeutet insbesondere:

$$v \in T_a \mathbb{S}^n \iff v \perp \nabla f(a)\,.$$

(40.4) Definition: $N_a M := (T_a M)^\perp \subset \mathbb{R}^n$ ist der *Normalenraum* an M im Punkte $a \in M$.

(40.5) Lemma:

1° $N_a M \oplus T_a M^\perp$.

2° *Wenn* $U' \cap M = f^{-1}(0)$ *für* $f : U' \to \mathbb{R}^m$ *in einer in* $\mathbb{R}^n$ *offenen Umgebung* U' *von* $a \in M$ *mit* $\mathrm{rg} Df(a) = n - k$*, dann gilt*

$$N_a M = \mathrm{span}\{\nabla f^j(a) : j = 1, \ldots, m\}\,.$$

(40.6) Bemerkungen:

1° $T_a M$ ist intrinsisch, $N_a M$ nicht.

2° Im Falle einer Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ im Raum und einer Karte $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^2$ von M mit Parametrisierung $\psi = \varphi^{-1}$ hat die Tangentialebene $T_a M$ an M in a die Basis (ψ_1, ψ_2) (siehe oben 40.3.1°) und $N_a M$ wird durch den Normalenvektor $\psi_1 \times \psi_2$ aufgespannt. Der Einheitsnormalenvektor

$$\frac{\psi_1 \times \psi_2}{\|\psi_1 \times \psi_2\|}$$

ist eindeutig bis auf Vorzeichen.

Geometrie auf Mannigfaltigkeiten:

Die Tangentialräume an eine Mannigfaltigkeit gehören also zur Mannigfaltigkeit, ähnlich wie die Ableitungen zu den differenzierbareb Abbildungen gehören. Die Tangentialräume gestatten, die euklidische Geometrie des $\mathbb{R}^n$ auf Untermannigfaltigkeiten zu übertragen: $T_a M$ ist als Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ein euklidischer Raum der Dimension k, in dem Tangentialraum hat man daher den Begriff der Länge von Vektoren und das Konzept eines Winkels zwischen Vektoren.

Bezüglich einer durch eine Karte gegebenen Basis (ψ_j) von $T_a M$ hat man insbesondere den

(40.7) Definition: *Maßtensor* $g = (g_{ij})\,,\ g_{ij} = \langle \psi_i, \psi_j \rangle\,,\ 1 \le i, j \le k$. Für Tangentialvektoren $X = X^i \psi_i\,,\ Y = Y^j \psi_j \in T_a M$ gilt

$$\langle X, Y \rangle = g_{ij} X^i Y^j = X^T g Y\,.$$

(g_{ij}) wird auch die *Fundamentalform* von M bezüglich der Karte φ genannt.

Bemerkungen:

1) Das funktioniert auch für den Fall eines unendlichdimensionalen reellen Hilbertraumes anstelle von $\mathbb{R}^n$, allerdings ohne die zum Schluss beschriebenen Basisdarstellungen.

2) Analog zum euklidischen Skalarprodukt ist es auch interessant, andere Skalarprodukte zu betrachten (z.B. Minkowski-Skalarprodukt).

Es seien jetzt zwei Karten $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^k$ und $\overline{\varphi} : \overline{U} \to \overline{V} \subset R^k$ mit $a \in U \cap \overline{U}$ gegeben, und wir nehmen $U = \overline{U} = U \cap \overline{U}$ an. Es sei $b = \varphi(a)$, $\overline{b} = \overline{\varphi}(a)$. Nach den Voraussetzungen an die Karten ist

$$F := \overline{\varphi} \circ \varphi^{-1} = (\overline{\psi})^{-1} \circ \psi : V \to \overline{V}$$

ein $\mathcal{C}^q$-Diffeomorphismus der in $\mathbb{R}^k$ offenen V und $\overline{V}$ (dabei $\overline{\psi} = (\overline{\varphi})^{-1}$). F wird *Koordinatenwechsel* (auch: Koordinatentransformation) oder *Kartenwechsel* genannt.

(40.8) Satz: (Transformationsverhalten)

1° $\psi_j(b) = \partial_j F^k(b)\psi_k(\overline{b})$.

2° $\overline{X}^j = \partial_i F^j(b) X^i$ *für Tangentialvektoren* $X = X^i\psi_i = \overline{X}^j\overline{\psi}_j \in T_aM$.

3° $g_{\mu\nu}(b) = \overline{g}_{ij}(\overline{b})\partial_\mu F^i(b)\partial_\nu F^j(b)$. [09.11.07]

(40.9) Beispiele:

1° Sphäre $\mathbb{S}^2$ mit der Parametrisierung $\psi(\phi,\theta) = (\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta)$:

$$g_{\phi\phi} = g_{11} = \sin^2\theta \, , \; g_{\phi\theta} = g_{12} = 0 \, , \; g_{\theta\theta} = g_{22} = 1 \, .$$

2° Graph: Es sei $M = \Gamma(h)$ für eine $\mathcal{C}^q$-Funktion $h : W \to \mathbb{R}$ auf einer in $\mathbb{R}^k$ offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^k$. Dann ist $\psi(x) = (x, h(x))$, $x \in W$, eine $\mathcal{C}^q$-Immersion und topologisch als Abbildung $\psi : W \to \Gamma(h)$. Daher ist $\varphi = \psi^{-1}$ eine (globale) Karte. Die Basisvektoren ψ_j haben die Form

$$\psi_j(x) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, \partial_j h(x))$$

und es folgt

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \partial_i h(x)\partial_j h(x) \, .$$

Man beachte, dass $\left(g_{ij}\right)$ nicht Diagonalmatrix ist, anders als im vorangehenden Beispiel.

3° Spezialfall zu 2°: Im Falle der oberen Schale des Hyperboloids zu

$$\omega(p) := \sqrt{(\|p\|^2 + m^2)} \, , \; p = (p_1, \ldots, p_k) \in \mathbb{R}^k \, .$$

also $M = \{(p, \omega(p)) : p \in \mathbb{R}^k\}$ („Massenschale“) und

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij} + \frac{p_i p_j}{\omega(x)^2} \, .$$

Wozu wird der Maßtensor eingeführt? Die Länge eines Tangentialvektors $X = X^j\psi_j \in T_aM$ lässt sich mit Hilfe des Maßtensors formulieren, und zwar gilt

$$\|X\| = \sqrt{\langle X^i\psi_i, X^j\psi_j\rangle} = \sqrt{g_{ij}X^iX^j} \, .$$

Die Kurvenlänge einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve γ in $\mathbb{R}^n$, die ganz in U bezüglich einer Karte $\varphi : U \in V$ von M verläuft, ist

$$s(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot\gamma(t)\| \; dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij}\dot\gamma^i\dot\gamma^j} \, dt \, .$$

Will man den Integranden noch genauer bezeichnen, insbesondere die Abhängigkeit von t, so seien $(\varphi \circ \gamma)^i : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ die Komponenten von $\varphi \circ \gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^k$ und man erhält mit $\dot{\gamma}^j(t) = (\varphi \circ \dot{\gamma})^j(t)$

$$s(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij}(\varphi \circ \gamma(t))\, \dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t)}\, dt\,.$$

Diese Notation ist nicht ganz konsistent, aber man möchte die g_{ij} in ihrer Abhängigkeit von den Punkten der Mannigfaltigkeiten so schreiben, dass die Abhängigkeit von der Parameterwerten $q \in V$ zum Ausdruck kommt. Eine konsistente Notation erhäkt man mit $q = \varphi \circ \gamma$ und dann

$$s(\gamma) == \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij}(q(t))\, \dot{q}^i(t)\dot{q}^j(t)}\, dt\,.$$

Im Übrigen haben wir hier einmal mehr verwendet, dass in dieser Situation die Komposition $\varphi \circ \gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar ist (vgl. Präsenzaufgaben 4).

(40.10) Definition: Die *Distanz* dist_M in der Mannigfaltigkeit M zwischen Punkten $a, b \in M$ ist

$$\operatorname{dist}_M(a, b) := \inf\{s(\gamma) : \gamma \in \mathcal{W}(a, b)\}\,.$$

Dabei ist $\mathcal{W}(a, b)$ die Menge aller stückweise stetig differenzierbaren Kurven $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, die ganz in M verlaufen, also $\gamma([t_0, t_1]) \subset M$ erfüllen, und die a mit b verbinden, für die also auch noch $\gamma(t_0) = a\,,\ \gamma(t_1) = b$ gilt.

(40.11) Beispiele:

1° Euklidischer Abstand: Es gilt $\operatorname{dist}_{\mathbb{R}^n}(a, b) = \|a - b\|$ in der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$. Denn die Geraden sind die kürzesten Verbindungen zwischen den Punkten des $\mathbb{R}^n$. (Vgl. Präsenzübungen 4).

2° In einer offenen Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ des $\mathbb{R}^n$ als n-dimensionaler Mannigfaltigkeit ist 1° in der Regel nicht richtig, z.B. im Falle von 2 sich schneidenden offenen Kugeln. Auf der Vereinigung zweier offenen Kugeln B_1, B_2, die sich nicht schneiden, wird die Distanz ∞ für Punkte $a \in B_1$ und $b \in B_2$.

3° Auf $\mathbb{S}^2$: $\operatorname{dist}_{\mathbb{S}^2}(N, S) = \pi$, $N = (0, 0, 1)\,,\ S = (0, 0, -1)$.

4° *Distanz* in $M = \mathbb{S}^n$: Für $a, b \in \mathbb{S}^n$ mit $a = -b$ (Antipoden) gilt $\operatorname{dist}_{\mathbb{S}^n}(a, b) = \pi$. Für $a, b \in \mathbb{S}^n$ mit $a \neq b$ und $a \neq -b$ gibt es den eindeutig bestimmten „Großkreis“ $\mathbb{S}' = \mathbb{S}^n \cap (\mathbb{R}a + \mathbb{R}b)$ und es ist $\operatorname{dist}_{\mathbb{S}^n}(a, b) = \operatorname{dist}_{\mathbb{S}'}(a, b)$ mit $\mathbb{S}' \cong \mathbb{S}^1$. Schließlich ist $\operatorname{dist}_{\mathbb{S}^n}(a, b) = \phi$ für den (kleineren) positiven Winkel zwischen a und b.

(40.12) Satz:

1° dist_M ist eine Metrik auf M, wenn M wegweise zusammenhängend ist.

2° dist_M erzeugt die von $\mathbb{R}^n$ induzierte Topologie auf M.

In der Regel wird das Infimum in $\operatorname{dist}_M(a, b) = \inf\{s(\gamma) : \gamma \in \mathcal{W}(a, b)\}$ nicht angenommen. Zum Beispiel gilt das für $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $a = (1, 0)\,, b = (-1, 0)$.

(40.13) Definition: (Geodätische) Eine natürlich parametrisierte Kurve $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^n$, die ganz in M verläuft, ist eine *Geodätische* in M, wenn sie im Kleinen eine kürzeste Verbindung ist, das soll heißen:

Zu jedem Parameter $t^* \in [0, L]$ gibt es im Falle $t^* < L$ ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass $\gamma|_{[t^*, t^*+\varepsilon]}$ für alle $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ kürzeste Verbindung in M von $\gamma(t^*)$ und $\gamma(t^* + \varepsilon)$ ist, d.h. $s(\gamma|_{[t^*, t^*+\varepsilon]}) =$

$\mathrm{dist}_M(\gamma(t^*), \gamma(t^*+\varepsilon))$. Und im Falle $0 < t^*$ analog ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass $\gamma|_{[t^*-\varepsilon,t^*]}$ für alle $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ kürzeste Verbindung in M von $\gamma(t^*)$ und $\gamma(t^*-\varepsilon)$ ist, d.h. $s(\gamma|_{[t^*-\varepsilon,t^*]}) = \mathrm{dist}_M(\gamma(t^*), \gamma(t^*-\varepsilon))$.

(Ergänzende Bemerkung: Die Definition setzt voraus, dass eine Geodätische immer mindestens einmal stetig differenzierbar ist. Wenn man diese Bedingung abschwächt z.B. zu stückweise stetig differenzierbar wie in einer Übungsaufgabe, dann muss die Minimalisierungsbedingung, im Kleinen eine kürzeste Verbindung zu sein, anders gefasst werden, und zwar wie folgt:

Zu jedem Parameter $t^* \in [0, L]$ gibt es im Falle $0 < t^* < L$ ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass $\gamma|_{[t^*-\varepsilon',t^*+\varepsilon]}$ für alle $\varepsilon, \varepsilon' \in [0, \varepsilon_0]$ kürzeste Verbindung in M von $\gamma(t^*-\varepsilon')$ und $\gamma(t^*+\varepsilon)$ ist, d.h. $s(\gamma|_{[t^*-\varepsilon',t^*+\varepsilon]}) = \mathrm{dist}_M(\gamma(t^*-\varepsilon'), \gamma(t^*+\varepsilon))$. Und im Falle $t^* = 0$ (bzw. $t^* = L$) gibt es analog ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass $\gamma|_{[0,\varepsilon]}$ (bzw. $\gamma|_{[L-\varepsilon,L]}$) für alle $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ kürzeste Verbindung in M von $\gamma(0)$ und $\gamma(\varepsilon)$ (bzw. $\gamma(L)$ und $\gamma(L-\varepsilon)$) ist, d.h. $s(\gamma|_{[0,\varepsilon]}) = \mathrm{dist}_M(\gamma(0), \gamma(\varepsilon))$. $s(\gamma|_{[L-\varepsilon,L]}) = \mathrm{dist}_M(\gamma(L), \gamma(L-\varepsilon))$.)

Zum Beispiel sind die natürlich parametrisierten Großkreise in $M = \mathbb{S}^n$ Geodätische. Auf Geodätische als Lösung eines Variationsproblems kommen wir im nächsten Paragraphen zurück.

(40.14) Definition: (Kritischer Punkt unter einer Nebenbedingung) Sei $f \in \mathcal{C}^1(U', \mathbb{R})$ in einer offenen Umgebung $U' \subset \mathbb{R}^n$ eines Punktes $a \in M$ einer $\mathcal{C}^q$-Mannigfaltigkeit definiert. a ist ein *kritischer Punkt von* $f|_M$ (oder *kritischer Punkt von* f *unter der Nebenbedingung* M), wenn für alle stetig differenzierbaren $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(\,]-\varepsilon, \varepsilon[\,) \subset M \cap U'$ und mit $\gamma(0) = a$ gilt: 0 ist kritischer Punkt von $f \circ \gamma$, also $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0} = 0$.

Offensichtlich ist ein Punkt $a \in M$, in dem $f|_M$ ein lokales Minimum oder Maximum, also ein lokales Extremum, hat, stets ein kritischer Punkt für f unter der Nebenbedingung M.

(40.15) Lemma: *$a \in M$ ist genau dann kritisch für f unter der Nebenbedingung M, wenn*

$$Df(a)|_{T_aM} = 0\,.$$

(40.16) Satz: (Methode der Lagrange-Multiplikatoren) *In der offenen Teilmenge $U' \subset \mathbb{R}^n$ sei die Mannigfaltigkeit $M = g^{-1}(0)$ durch $g \in \mathcal{C}^1(U', \mathbb{R}^{n-k})$ mit der Rangbedingung $\mathrm{rg} Dg(x) = n-k$ für alle $x \in U'$ gegeben. Es sei $f \in \mathcal{C}^1(U', \mathbb{R})$ und $a \in M$. Dann ist f genau dann kritisch in a unter der Nebenbedingung $g = 0$, wenn es $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n-k$, mit*

$$D(f + \lambda_1 g^1 + \ldots + \lambda_{n-k} g^{n-k})(a) = 0$$

gibt, wobei $g = (g^1, \ldots, g^{n-k})$. [13.11.07]

Die Methode besteht darin, das nichtlineare Gleichungssystem in den $2n-k$ Unbestimmten $a = (a^1, \ldots, a^n) \in R^n$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k}) \in R^{n-k}$

$$g(a) = 0$$

$$\nabla f(a) + \lambda_j \nabla g^j(a) = 0$$

zu lösen.

(40.17) Beispiele:

1° Pendel: In welchen Punkten ist $f(x, y) = y$ extremal unter $g(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$?

Der Ansatz $f_x + \lambda g_x = 2\lambda x = 0\,,\ f_y + \lambda g_y = 1 + 2\lambda y = 0$ liefert als mögliche kritische Punkte $a = (x, y)$ von f unter $g = 0$ zunächst $x = 0$ und $y = -(2\lambda)^{-1}$, und daher $a = (0, \pm r)$. Das sind in der Tat die beiden einzigen Extremwerte von f unter $g = 0$, da stets $f(x,y) = y \in [-r,r]$. Es handelt sich auch um die beiden Gleichgewichtspunkte des Pendels.

2° Wo ist $f(x,y) = x$ extremal unter $g = 0$ für $g(x,y) = y^2 - x^3$? (In $(0,0)$ ist $g^{-1}(0)$ keine Mannigfaltigkeit, aber $M = g^{-1}(0) \setminus \{(0,0)\}$ ist Mannigfaltigkeit.)

Der Ansatz $f_x + \lambda g_x = 1 - 3\lambda x^2 = 0\,,\ f_y + \lambda g_y = 2\lambda y = 0$ liefert entsprechend $y = 0$ und damit sofort $x = 0$. Daher hat f kein Extremum in M, aber möglicherweise in der Singularität $(0,0)$. Tatsächlich gilt für alle (x,y) mit $g(x,y) = 0$ sofort $x^3 = y^2 \geq 0$ also auch $f(x) = x \geq 0$. Also hat f in $a = (0,0)$ ein absolutes Minimum unter $g = 0$ und ansonsten kein lokales Extremum.

§41 Euler-Lagrange-Gleichungen

Es geht um Variationsrechnung als Verallgemeinerung der Bestimmung von Extrema bei Funktionen. Statt Funktionen $f = f(x)$ haben wir in der Variationsrechnung Funktionale $S = S(\gamma)$ auf Räumen von Funktionen γ, die hier in diesem Paragraphen stets Kurven sind. Anstelle von kleinen Änderungen von Punkten x im Definitionsbereich der Funktion f werden jetzt die Kurven γ verändert und diese Veränderung nennt man „Variation“. Daher die Bezeichnung Variationsrechnung. Die Variation der Kurve γ hat typischerweise die Form $\gamma + \varepsilon\eta$ mit einer (leinen Konstanten $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und einer weiteren Kurve η, die in 0 beginnt und auch dort endet.

Zur Motivation ein Beispiel aus der Geometrie, das wir aus dem vorangehenden Paragraphen kennen: Zu Punkten $a, b \in M$ in einer Mannigfaltigkeit wird eine Kurve γ gesucht, welche die Distanz in M minimiert:

$$\mathrm{dist}_M(a,b) = s(\gamma)$$

wobei $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ natürlich $\gamma(t_0) = a, \gamma(t_1) = b$, erfüllt und außerdem noch $\|\dot\gamma\| = 1$.

Dabei ist

$$s(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij}\,\dot\gamma^i\dot\gamma^j}\,dt$$

für die symmetrische Matrix $g = (g_{ij})$ mit Funktionen $g_{ij} : Q \to \mathbb{R}$, die von einer lokalen Parametrisierung $\psi : Q \to U \subset M$ kommen.

Allgemeiner betrachten wir zu einer offenen Teilmenge $Q = V \subset \mathbb{R}^n$ (zum Beispiel als Parameterbereich einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit) eine so genannte *Lagrangefunktion* $L : Q \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $L = L(q,v)$, von der in der Regel nicht mehr vorausgesetzt wird, als dass sie zweimal stetig differenzierbar ist. Zu einer solchen Funktion und zu vorgegebenen Punkten $a, b \in Q$ gehört das *Wirkungsfunktional*

$$S(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot\gamma)\,dt$$

zu $\mathcal{C}^1$-Abbildungen (Kurven) $\gamma : [t_0, t_1] \to Q$ mit $\gamma(t_0) = a, \gamma(t_1) = b$. Gesucht wird γ, so dass $S(\gamma)$ minimal wird

$$S(\gamma) = \min S\,!$$

In Abschwächung dazu wird ein γ gesucht, das extremal oder gar nur stationär ist für S. Wir präzisieren im Folgenden, was das genau bedeuten soll:

Für Punkte $a, b \in Q$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\mathcal{W}(a,b)$ die Menge aller stückweise stetig differenzierbaren Kurven $\gamma : [t_0, t_1] \to Q$, die a mit b verbinden, für die also $\gamma(t_0) = a\,,\ \gamma(t_1) = b$ gilt. $\mathcal{W}(a,b)$ ist Teilmenge des Vektorraumes $\mathcal{C}^1_{\mathrm{st}}([t_0,t_1]\,,\mathbb{R}^n)$ aller stückweise stetig differenzierbaren Kurven in $\mathbb{R}^n$. Dieser Raum $\mathcal{C}^1_{\mathrm{st}}([t_0,t_1]\,,\mathbb{R}^n)$ kann mit der Norm $\|\gamma\|_1 := \sup\{\|\gamma(t)\| + \|\dot\gamma(t)\| : t \in [t_0.t_1]\}$ versehen werden und wird damit zu einem Banachraum. Daher steht in dieser Situation der Kalkül der Differentialrechnung in Banachräumen zur Verfügung. Das Folgende ist im wesentlichen eine Anwendung der Differentialrechnung in Banachräumen, die allerdings hier weniger abstrakt formuliert wird, wie das der Tradition entspricht. Bereits lange vor der Einführung des Begriffs des Banachraumes wurde die Variationsrechnung (Newton, Lagrange, Euler, Bernoulli) begründet.

Zu einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $L : Q \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ soll das Wirkungsfunktional

$$S_L(\gamma) = S(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma,\dot\gamma)\,dt$$

auf Extremale untersucht werden. Notwendig dafür, dass in γ ein Extremum vorliegt, ist offensichtlich die Bedingung

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(\gamma+\varepsilon\eta)|_{\varepsilon=0} = 0$$

für stückweise stetig differenzierbare Vergleichsfunktionen $\eta : [t_0,t_1] \to \mathbb{R}^n$ mit $\eta(t_0) = 0 = \eta(t_1)$, sofern diese Ableitungen stets existieren. Aufgrund der Stetigkeit von η und γ gibt es jedenfalls zu einer solchen Kurve η stets ein $r > 0$, so dass $(\gamma+\varepsilon\eta)([t_0,t_1]) \subset Q$ gilt für alle $\varepsilon \in [-r,r]$.

Die oben genannte Bedingung hat formale Verwandtschaft mit der Extremwertbestimmung mit Nebenbedingungen, also auf Mannigfaltigkeiten.

$$\varepsilon \to \gamma + \varepsilon\eta$$

mit $\gamma+\varepsilon\eta$ wieder in $\mathcal{W}(a,b)$ ist eine (lineare) Kurve in $\mathcal{W}(a,b)$ mit Ableitung η in 0. Der Ausdruck $\frac{d}{d\varepsilon} S(\gamma+\varepsilon\eta)|_{\varepsilon=0}$ kann als

$$DS(\gamma).\eta$$

verstanden werden für die Ableitung $DS(\gamma)$ an der Stelle γ, die als eine lineare Abbildung auf einem geeigneten Unterraum von $\mathcal{C}^1_{\mathrm{st}}([t_0,t_1]\,,\mathbb{R}^n)$ anzusehen ist. Und die oben genannte Bedingung ist dann nichts anderes als

$$DS(\gamma)|_{\mathcal{V}} = 0\,,$$

wobei $\mathcal{V}$ der Vektorraum $\mathcal{V} = \{\eta \in \mathcal{C}^1_{\mathrm{st}}([t_0,t_1]\,,\mathbb{R}^n) : \eta(t_0) = 0 = \eta(t_1)\}$ ist und als Tangentialraum an $\mathcal{W}(a,b)$ in γ verstanden werden kann. Damit ist die folgende Definition vorbereitet:

(41.1) Definition: $\gamma \in \mathcal{W}(a,b)$ heißt *kritisch* für S unter $\mathcal{M}$ (oder auch *stationär*), wenn die gerade beschriebene Bedingung vorliegt, d.h. wenn

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(\gamma+\varepsilon\eta)|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \forall\, \eta \in \mathcal{V}$$

gilt für den Untervektorraum $\mathcal{V} = \{\eta \in \mathcal{C}^1_{\mathrm{st}}([t_0,t_1]\,,\mathbb{R}^n) : \eta(t_0) = 0 = \eta(t_1)\}$.

Eine kritische Kurve heißt dann auch *(stationäre) Lösung des Variationsproblems*

$$\delta S = 0\,,$$

obwohl sie das eigentliche Variationsproblem nicht immer löst.

Achtung: Eine stationäre Lösung des Variationsproblems ist nicht notwendig auch eine Lösung des Variationsproblems, es muss im allgemeinen weder ein (lokales) Minimum noch ein (lokales) Maximum vorliegen. Das ist genauso wie für Funktionen: $f'(x) = 0$ garantiert noch nicht, das in x auch ein (lokales) Extremum von f vorliegt, trotzdem nennt man x stationär.

Bemerkungen:

1° Die Menge $\mathcal{W}(a,b)$ wird gelegentlich verkleinert, z.B. durch Zusatzbedingungen wie etwa $\|\dot\gamma\| = 1$ oder auch höhere Differenzierbarkeit für γ oder auch η.

2° Die Menge $\mathcal{W}(a,b)$ wird gelegentlich auch vergrößert, wenn man zunächst so genannte schwache Lösungen aufspüren will.

3° Auch $\mathcal{V}$ wird gelegentlich je nach Aufgabenstellung verändert.

(41.2) Satz: *Jede zweimal stetig differenzierbare stationäre Lösung des Variationsproblems $\delta S = 0$ erfüllt die* Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}\,.$$

Das soll heißen: Ist γ stationär, so erfüllt die Kurve die Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^j}(\gamma(t),\dot\gamma(t))\right) = \frac{\partial L}{\partial q^j}(\gamma(t),\dot\gamma(t))\,,\ t\in[t_0,t_1]\ ,\ j = 1,\dots,n\,.$$

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist bekannt, dass eine Differentialgleichung wie oben zu jeder Vorgabe von $\mathring{q} \in Q$ und $\mathring{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathring{v} \neq 0$, eine eindeutig bestimmte Lösung mit $\gamma(t_0) = \mathring{q}\,,\ \dot\gamma(t_0) = \mathring{v}$ hat, zumindestens dann, wenn wir die Differentialgleichungen nach $\ddot\gamma$ auflösen können.

(41.3) Beispiele:

1° Grundgleichungen der Klassischen Mechanik:

$$L(q,v) = \frac{1}{2}\,\|v\|^2 - U(q)$$

für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $U : Q \to \mathbb{R}$ führt zu den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\ddot q(t) = -\nabla U(q(t))\,.$$

Hier haben wir $\gamma(t) = q(t)$ gesetzt, wie es in der Physik üblich ist. L kann interpretiert werden als Differenz der kinetischen und der potentiellen Energie und $\ddot q = \nabla U(q)$ ist die zugehörige Bewegungsgleichung. Die stationären Lösungen sind aus Sicht der Physik die Bewegungen des physikalischen Systems, unabhängig davon, ob sie tatsächlich ein Extremum beschreiben.

Das ist das *Hamiltonsche Prinzip* der Klassischen Mechanik!

Statt der oben genannten Lagrangefunktion wird oft von der koordinatenunabhängigen Version

$$L(q,v) = \frac{1}{2}g_{ij}(q)v^iv^j - U(q)$$

mit einer symmetrischen Matrix (g_{ij}) von stetig differenzierbaren Funktionen ausgegangen. Die Euler-Lagrange-Gleichungen werden komplizierter, siehe 3° und Präsenzübngen.

2° Kürzeste Verbindung im euklidischen Raum $M = \mathbb{R}^n$: $L(q,v) = \|v\|$ ($Q = \mathbb{R}^n$) unter der Zusatzbedingung $\|\dot q\| = 1$.

Die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichungen sind $\ddot q = 0$. Die Lösungen sind $q(t) = t\mathring{v} + \mathring{q}$ mit $\|\mathring{v}\| = 1$, also die Geraden. Daher sind die Geraden die Kandidaten für das Variationsproblem der kürzesten Verbindung, also Kandidaten, Geodätische in $M = \mathbb{R}^n$ zu sein. Die Geraden sind tatsächlich Geodätische des euklidischen $\mathbb{R}^n$, und es gibt keine anderen (vgl. Präsenzübungen) bis auf Reparametrisierung.

3° Geodätische auf einer n-dimensionalen $\mathcal{C}^3$-Mannigfaltigkeit M. (Wir verlangen dreimal stetig differenzierbar, damit der Integrand der Kurvenlängenfunktion $s(\gamma)$ zweimal stetig differenzierbar ist.)

Es sei $\varphi : U \to Q \in \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^3$-Karte mit Parametrisierung $\psi = \varphi^{-1}$, $g_{ij}(q) = \langle \partial_i \psi(q), \partial_j \psi(q) \rangle$. Zu Kurven $\gamma : [t_0, t_1] \to U \subset M$ verwenden wir $q := \psi \circ \gamma : [t_0, t_1] \to Q$ mit den Komponenten q^j. Es ist dann $D\psi(q(t))^{-1}.\dot\gamma(t) = \dot q(t)$ und $\dot\gamma(t) = D\psi(q(t).(\dot q^1(t), \dots, \dot q^n(t))$. Daher ist die Kurvenlänge $s(\gamma)$ gerade

$$s(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij}(q(t))\, \dot q^i(t) \dot q^j(t)}\, dt\,.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen für dieses Variationsproblem ($L(q,v) = \sqrt{g_{ij}(q) v^i v^j}$) mit der Zusatzbedingung $\|\dot\gamma\| = 1$ sind äquivalent zu der

Geodätischengleichung:

$$\ddot\gamma^m = \frac{1}{2}\, g^{mk}\, (g_{ij,k} - 2 g_{ik,j})\, \dot\gamma^i \dot\gamma^j \ ,\ m = 1, \dots, n\,.$$

Notationen dabei: (g^{mk}) ist die zu (g_{ij}) inverse Matrix; $g_{ij,k} := \partial_k g_{ij}$. [16.11.07]

Eine andere Form der Geodätischengleichung ist

$$\ddot\gamma^m + \frac{1}{2}\, g^{mk}\, (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k})\, \dot\gamma^i \dot\gamma^j = 0\ ,\ m = 1, \dots, n\,.$$

Mit der Abkürzung

$$\Gamma^m_{ij} := \frac{1}{2}\, g^{mk}\, (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k})$$

(die Γ^m_{ij} heißen die *Christoffelsymbole*) wird die Geodätischengleichung verkürzt zu

$$\ddot\gamma^k + \Gamma^k_{ij}\, \dot\gamma^i \dot\gamma^j = 0\ ,\ k = 1, \dots, n\,.$$

Unbewiesen bleibt in dieser Vorlesung die für $\mathcal{C}^3$-Mannigfaltigkeiten richtige und wichtige Aussage: Eine Kurve, die die Geodätengleichung erfüllt, ist eine Geodätische und es gibt keine weiteren Geodätischen bis auf Reparametrisierungen.[3]

Die Euler-Lagrange-Gleichungen zu 1° können in der Form

$$\ddot\gamma^k + \Gamma^k_{ij}\, \dot\gamma^i \dot\gamma^j = g^{mk} U_{,k}\ ,\ k = 1, \dots, n$$

geschrieben werden, wenn die Matrix g positiv definit ist.

4° Für den harmonischen Oszillator ist $T = \frac{1}{2} m \|v\|^2$ die kinetische und $U = k \|q\|^2$ die potentielle Energie mit positiven Konstanten $m, k > 0$. Mit der Lagrangefunktion $L = \frac{1}{2} m \|v\|^2 - k \|q\|^2$ erhalten wir als Bewegungsgleichungen:

$$m \ddot q(t) = -2k q(t)$$

[3] für einen Beweis sehe man z.B. in dem Lehrbuch von J. Jost: *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer-Verlag, 1998, nach.

und explizit

$$\ddot{q} = -\frac{2k}{m} q \, .$$

Die allgemeine Lösung dazu ist $q(t) = \cos \omega t A + \sin \omega t B$, wobei $\omega := \sqrt{2\frac{k}{m}}$, mit $q(0) = A \in \mathbb{R}^n$ und $\dot{q}(0) = B \in \mathbb{R}^n$.

Man kommt auf die Lösung zum Beispiel durch den Ansatz $v(t) := \dot{q}(t)$, so dass aus dem System $m\ddot{q}(t) = -2kq(t)$ von n Differentialgleichungen zweiter Ordnung das einfachere System

$$\dot{q} = v \ , \ \dot{v} = \omega^2 q$$

von $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung wird.

Diese Umwandlung bzw. Vereinfachung hat eine weitreichende Verallgemeinerung.

(41.4) Satz: *Sei eine Lagrangefunktion* $L : Q \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *mit*

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} (\mathring{q}, \mathring{v}) \right)_{1 \le i,j \le n} \neq 0$$

in einem Punkt $(\mathring{q}, \mathring{v}) \in Q \times \mathbb{R}^n$ *gegeben. (*L *heißt dann regulär in* $(\mathring{q}, \mathring{v})$*.) Dann hat die Gleichung*

$$F(p, q, v) := p - L_v(q, v) = 0$$

eine Auflösung nach v *in einer offenen Umgebung* $U \times V \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n$ *von* $(\mathring{p}, \mathring{q}, \mathring{v})$*,* $\mathring{p} := L_v(\mathring{q}, \mathring{v})$*. Also gibt es eine* $\mathcal{C}^1$*-Abbildung* $g : U \to V$ *mit der Eigenschaft, dass* $F(p, q, v) = 0$ *genau dann gilt, wenn* $v = g(p, q)$*. Diese Auflösung führt zu der so genannten* Hamiltonfunktion

$$H(q, p) := \langle p, g(p, q) \rangle - L(q, g(p, q)) \ , \ (p, q) \in U \, ,$$

(kurz: $H = pv - L$*) mit der folgenden Eigenschaft. Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind in der gegebenen Umgebung von* $(\mathring{q}, \mathring{v})$ *äquivalent zu den so genannten* Hamiltonschen *(oder* kanonischen*) Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = H_p \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -H_q \, . \end{aligned}$$

(41.5) Beispiele:

1° Beim harmonischen Oszillator gilt $L_v = mv$ und die Auflösung von $p - mv = 0$ ist $v = \frac{p}{m}$, also $H = +\frac{1}{2}\frac{1}{m}\|p\|^2 + k\|q\|^2$ mit $H_q = 2kq$, $H_p = \frac{1}{m}p$ und den kanonischen Gleichungen sind

$$\dot{q} = \frac{1}{m} p \, , \, \dot{p} = -2kq \, .$$

2° Allgemeiner: Sei $F(q) = \varphi(\|q\|) \frac{q}{\|q\|}$, $q \in R^n$, $q \neq 0$ ein Zentralfeld mit stetiger Funktion φ, also $F = \nabla U$ mit $U(q) = \Phi(\|q\|)$ für eine Stammfunktion Φ von φ. Eine typische Lagrangefunktion aus der Physik ist $L(q, v) = \frac{1}{2}m\|v\|^2 - U(q)$. Die kanonischen Differentialgleichungen lauten

$$\dot{q} = \frac{1}{m} p \, , \, \dot{p} = -F(q) \, .$$

Man beachte im Falle $n = 3$: Der Drehimpuls $I = q \times p$ bleibt auf den Lösungen konstant: $\dot{I} = \dot{q} \times p + q \times \dot{p} = \frac{1}{m} p \times p + q \times (-F(q)) = 0$ aufgrund der Eigenschaften des „Kreuzproduktes $\times$“.

(41.6) Definition: Eine *Bewegungskonstante* auf $W \subset Q \times \mathbb{R}^n$, bzw. ein *erstes Integral* zum Lagrangesystem $(Q \times \mathbb{R}^n, L)$ ist eine Funktion $I : W \to \mathbb{R}$, so dass $I(\gamma)$ konstant ist für alle Lösungen γ der Euler-Lagrange-Gleichungen, die ganz in W verlaufen. Analog für das zugehörige Hamiltonsystem.

(41.7) Beispiele:

1° Die Komponenten des Drehimpulses $I = (I_1, I_2, I_3)$ in dem gerade beschriebenen Beispiel $L(q,v) = \frac{1}{2}m\|v\|^2 - U(q)$ sind Bewegungskonstante. Es gibt dazu eine n-dimensionale Verallgemeinerung, vgl. Präsenzaufgaben 5.

2° $H = I$ ist immer eine Bewegungskonstante.

$$\frac{d}{dt}H(q(t),p(t)) = H_q\dot{q} + H_p\dot{p} = H_qH_p + H_p(-H_q) = 0\,.$$

3° Weitere erste Integrale beim harmonischen Oszillator (neben der Gesamtenergie $H = \frac{1}{2}m\|v\|^2 - k\|q\|^2$) sind die „Teilenergien“ $H_j = \frac{1}{2}m(v^j)^2 + k(q^j)^2$ und die Drehimpulskomponenten. Eine Lösung $q(t)$ der Euler-Lagrange-Gleichungen, also wie in 41.3.4°, mit $E_j := H(q(0),v(0)) \in \mathbb{R}$ erfüllt $(q(t),v(t)) \in M := \bigcap H_j^{-1}(E_j)$. Analog im Hamiltonsystem.

(41.8) Bemerkung: Reduktion der Freiheitsgrade durch erste Integrale als Lösungsmethode.

Eine nicht triviale Bewegungskonstante I verhilft dazu, das System der Euler-Lagrange-Gleichungen um einen Freiheitsgrad (das bedeutet um eine Dimension, bzw. eine Gleichung) zu verringern. Denn zu einem regulären Wert $\mathring{I} \in \mathbb{R}$ von I hat jede Lösung γ mit $I(\gamma(t_0)) = \mathring{I}$ die Eigenschaft, ganz in der Niveaufläche $M := I^{-1}(I_0)$ zu bleiben, das heißt $\gamma(t) \in M$ für alle t zu erfüllen. Wenn also das ursprüngliche System auf $Q \times \mathbb{R}^n$ definiert ist, mit $L \in \mathcal{C}^2(Q \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, so genügt es, sich bei der Vorgabe von $\mathring{I}$ auf M zu reduzieren, denn alle Lösungen mit $I(\gamma(t_0)) = \mathring{I}$ liegen in M. Und M ist eine $n-1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit, ist also um eine Dimension reduziert. Es gilt jetzt, die Euler-Lagrange-Gleichungen auf M zu betrachten, und eine weitere Bewegungskonstante aufzuspüren, um den Freiheitsgrad weiter auf $n-2$ zu senken etc., um schließlich zu der Bahn einer Lösung zu kommen.

Analog, und besser für den Fall einer Hamiltonfunktion.

Dieses Verfahren, bei der man durch sukzessive Reduktion bis zu der Bahn einer Lösung kommt, funktioniert nicht allgemein, aber für so genannte *vollständig integrable Systeme*.

Bevor diese Programm ernsthaft durchgeführt werden kann, muss noch die gesamte Differentialrechnung auf M übertragen werden, d.h. es wird definiert, was eine differenzierbare Abbildung mit Werten in M und was eine differenzierbare Abbildung auf M ist (über die Karten). Insbesondere, stellt man fest, dass die Lagrangefunktion jeweils auf dem Tangentialbündel $TM = \{(a,v) : a \in M\,,\, v \in T_aM\}$ definiert ist, wobei TM wieder Mannigfaltigkeit ist. Die Hamiltonfunktion dagegen lebt auf dem entsprechenden Kotangentialraum.